

Klausur: Entscheidungstheorie, Wahrscheinlichkeit und Risiko

Prüfer: Spengler, Vogt

Datum: 31. Januar 2008

Prüfungs-Nr.: 11014

Name: **Vorname:**

Matr.-Nr.: **Fakultät:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamtpunkte	Note
Punkte											

Unterschrift der Prüfer:

.....

Gruppe B

Als Hilfsmittel sind zugelassen:

- **Nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Datenverarbeitungsfunktion (lt. Aushang des Prüfungsamtes)**
- **Sechs nicht kopierte handbeschriebene Blätter nach eigener Wahl; diese sind mit den Klausurheften abzugeben.**

Hinweise: 1. Bitte tragen Sie oben auf diesem Deckblatt zuerst Ihre persönlichen Daten ein!

2. Die Klausur besteht aus 9 Aufgaben. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten!

3. Bei Aufgaben mit mehreren vorgegebenen Antwortmöglichkeiten ist genau eine Antwort richtig.

- 4. Für Multiple Choice Aufgaben gilt: Für eine korrekte Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine nicht beantwortete Frage gibt es keinen Punkt und für eine falsche Antwort wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Die Punkte werden mit Gewichtungsfaktoren multipliziert, um zur Gesamtpunktzahl zu gelangen. Die jeweiligen Gewichte sind in der Aufgabenstellung angegeben.**
- 5. Die Klausur ist bei 50% der Gesamtpunktzahl auf jeden Fall bestanden.**
- 6. Nachstehend finden Sie die Aufgabensammlung mit integrierten Lösungsfeldern. Geben Sie Ihre Antworten bitte sorgfältig in den dafür vorgesehenen Bereichen an! Wenn Sie zu einer Aufgabe mehr als eine Antwort markieren oder angeben, wird diese als falsch bewertet. Falls Sie eine Korrektur vornehmen müssen, kennzeichnen Sie diese bitte deutlich!**
- 7. Das Klausurheft besteht aus diesem Deckblatt (2 Seiten) plus 9 Aufgaben (20 Seiten); bitte zählen Sie nach! Die Hefung darf nicht gelöst werden!**
- 8. Zusätzlich erhalten Sie Papier für eventuelle Nebenrechnungen. Dieses ist nach Klausurende mit dem Aufgabenheft und den von Ihnen möglicherweise mitgebrachten handschriftlichen Blättern vollständig abzugeben!**
- 9. Alle numerischen Ergebnisse sind auf zwei Stellen genau gerundet.**

Viel Erfolg!!!!!!

Aufgabe 1:

Eine Urne enthält 5 Kugeln, von denen drei 40g und zwei 90g wiegen. Es werden zwei Kugeln *ohne Zurücklegen* gezogen. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ereignis dieses Zufallsvorgangs das Gesamtgewicht der beiden Kugeln zu.

- a) Welche der folgenden Funktionen beschreibt die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieses Zufallsvorgangs? (Gewicht 2)

$f_X(X) = \begin{cases} 0,3 & \text{für } X = 80 \\ 0,6 & \text{für } X = 130 \\ 0,1 & \text{für } X = 180 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f_X(X) = \begin{cases} 0,36 & \text{für } X = 80 \\ 0,48 & \text{für } X = 130 \\ 0,16 & \text{für } X = 180 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f_X(X) = \begin{cases} 0 & \text{für } X < 80 \\ 0,3 & \text{für } 80 \leq X < 130 \\ 0,9 & \text{für } 130 \leq X < 180 \\ 1 & \text{sonst } X \geq 180 \end{cases}$

$f_X(X) = \begin{cases} 0 & \text{für } X < 80 \\ 0,36 & \text{für } 80 \leq X < 130 \\ 0,84 & \text{für } 130 \leq X < 180 \\ 1 & \text{sonst } X \geq 180 \end{cases}$

- Keine der Antworten ist richtig.

b) Welche der folgenden Funktionen beschreibt die Verteilungsfunktion dieses Zufallsvorgangs? (Gewicht 2)

$f_X(X) = \begin{cases} 0,3 & \text{für } X = 80 \\ 0,6 & \text{für } X = 130 \\ 0,1 & \text{für } X = 180 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f_X(X) = \begin{cases} 0,36 & \text{für } X = 80 \\ 0,48 & \text{für } X = 130 \\ 0,16 & \text{für } X = 180 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f_X(X) = \begin{cases} 0 & \text{für } X < 80 \\ 0,3 & \text{für } 80 \leq X < 130 \\ 0,9 & \text{für } 130 \leq X < 180 \\ 1 & \text{sonst } X \geq 180 \end{cases}$

$f_X(X) = \begin{cases} 0 & \text{für } X < 80 \\ 0,36 & \text{für } 80 \leq X < 130 \\ 0,84 & \text{für } 130 \leq X < 180 \\ 1 & \text{sonst } X \geq 180 \end{cases}$

Keine der Antworten ist richtig.

c) Gegeben ist folgende Funktion: (Gewicht 3)

$$f_X(X) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei der angegebenen Funktion handelt es sich um

- eine Wahrscheinlichkeitsfunktion
- eine Verteilungsfunktion
- keine der Antworten ist richtig

d) Sofern möglich bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion aus c) die Wahrscheinlichkeit $P(X=0,25)$ (Gewicht 2)

- 0
- 0,5
- 0,8
- 1
- Die Funktion aus C) beschreibt keinen Zufallsprozess
- Keine der Antworten ist richtig

e) Sofern möglich bestimmen Sie mit der Hilfe der Funktion aus c) die Wahrscheinlichkeit $P(0,1 \leq X < 0,3)$ (Gewicht 3)

- 0,01
- 0,05
- 0,08
- 0,09
- Keine der Antworten ist richtig

f) Welche Aussage über den Erwartungswert bei stetigen Zufallsvariablen ist wahr? (Gewicht 4)

- Der Erwartungswert existiert nicht immer
- Der Erwartungswert ist immer positiv
- Der Erwartungswert ist immer kleiner als die Varianz
- Der Erwartungswert ist immer eine reelle Zahl
- Keine der Antworten ist richtig

g) Falls die Funktion in c) eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist, bestimmen Sie den Erwartungswert der zugehörigen Zufallsvariable. (Gewicht 4)

- 0
- 0,37
- 0,67
- 1
- Keine der Antworten ist richtig

Aufgabe 2:

Eine Urne enthält drei Kugeln, die von 1 bis 3 durchnummeriert sind. Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Anordnung gezogen.

a) Wie viele Möglichkeiten 2 Kugeln nach diesen Vorgaben zu ziehen gibt es somit? (Gewicht 1)

- 3
- 6
- 9
- 12
- Keine der Antworten ist richtig

Im Folgenden werden die beiden Zufallsvariablen X und Y betrachtet:

X: die kleinere der beiden Zahlen

Y: die Summe der beiden Zahlen

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert 1 annimmt und die Zufallsvariable Y den Wert 3 (d.h. $P(X = 1, Y = 3)$) ist : (Gewicht 1)

- 0
- 0,17
- 0,25
- 0,33
- 0,67
- Keine der Antworten ist richtig

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert 1 annimmt (d.h. $P(X = 1)$) ist: (Gewicht 1)

- 0
- 0,13
- 0,33
- 0,67
- Keine der Antworten ist richtig

d) Der Erwartungswert $E(X+Y)$ der Zufallsvariable $X+Y$ ist: (Gewicht 1)

- 1
- 4
- 5
- 6
- Keine der Antworten ist richtig

e) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig? (Gewicht 2)

- Ja
- Nein
- Keine der Antworten ist richtig

f) Welche Aussage über die Kovarianz $\text{Cov}(X,Y)$ der Zufallsvariablen X und Y stimmt? (Gewicht 3)

- $\text{Cov}(X,Y) = 0$
- $\text{Cov}(X,Y) > 0$
- $0 \leq \text{Cov}(X,Y) \leq 1$
- $0 \leq \text{Cov}(X,Y) \leq 2$
- Keine der Antworten ist richtig

g) Die Varianz $\text{Var}(X+Y)$ der Zufallsvariable $X+Y$ ist: (Gewicht 3)

- 0
- 0,67
- 0,89
- 1,56
- Keine der Antworten ist richtig

Aufgabe 3:

Zwei Fahrschüler A und B möchten unabhängig voneinander den Führerschein der Klasse 1 erwerben. Der Erfolg des einen Fahrschülers hat dabei keinen Einfluss auf den Erfolg des anderen Fahrschülers. Die Wahrscheinlichkeit, dass Fahrschüler A die Führerscheinprüfung besteht (Ereignis A), ist $P(A) = 0,9$ und die Wahrscheinlichkeit, dass Fahrschüler B die Führerscheinprüfung besteht (Ereignis B) ist $P(B) = 0,8$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) genau einer der beiden den Führerschein Klasse 1 besteht?

Eine korrekte Formel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit lautet: (Gewicht 2)

- $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$
- $P(\bar{A} \cup B) - P(A \cap \bar{B})$
- keine der obigen Antworten ist richtig

Die Wahrscheinlichkeit ist: (Gewicht 1)

- 0,16
- 0,26
- 0,36
- 0,46
- keine der obigen Antworten ist richtig

b) wenigstens einer von beiden besteht?

Eine korrekte Formel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit lautet: (Gewicht 2)

- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
- keine der obigen Antworten ist richtig

Die Wahrscheinlichkeit ist: (Gewicht 1)

- 0,68
- 0.78
- 0,88
- 0,98
- keine der obigen Antworten ist richtig

c) beide bestehen?

Eine korrekte Formel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit lautet: (Gewicht 2)

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- keine der obigen Antworten ist richtig

Die Wahrscheinlichkeit ist (Gewicht 1):

- 0,32
- 0,42
- 0,52
- 0,62
- keine der obigen Antworten ist richtig

d) keiner besteht?

Eine korrekte Formel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit lautet (Gewicht 2):

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} | \overline{A})$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B})$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B)$
- keine der obigen Antworten ist richtig

Die Wahrscheinlichkeit ist (Gewicht 1)

- 0,02
- 0,12
- 0,22
- 0,32
- keine der obigen Antworten ist richtig

e) Für zwei disjunkte Ereignisse gilt: (Gewicht 4)

- Sie sind stochastisch abhängig.
- Sie sind stochastisch unabhängig.
- Disjunktheit hat keine Bedeutung für stochastische Unabhängigkeit.
- keine der obigen Antworten ist richtig

Aufgabe 4:

Von den am Montag produzierten Autos einer Marke weisen 4 Prozent, von den am Freitag produzierten Autos weisen 3 Prozent und von den an den restlichen drei Werktagen produzierten Autos weisen jeweils 1 Prozent innerhalb des ersten Jahres erhebliche Mängel auf. An jedem der 5 Werktage wird die gleiche Anzahl von Autos produziert.

Aus der Produktion einer Woche wird zufällig ein Wagen ausgewählt.

Mit E wird das Ereignis bezeichnet, dass das zufällig ausgewählte Auto Mängel aufweist.

Mit A_i wird das Ereignis bezeichnet, dass das zufällig ausgewählte Auto am i -ten Tag der Woche ($i = 1, \dots, 5$) produziert wurde (d.h. A_1 ist das Ereignis, dass das zufällig ausgewählte Auto am 1. Tag der Woche (Montag) produziert wurde).

- a) Die Wahrscheinlichkeit ein Auto auszuwählen, dass am Montag (dem ersten Tag der Woche) produziert wurde (d.h. $P(A_1)$), ist: (Gewicht 2)

- 1/5
- 1/7
- 4/100
- 3/100
- Keine der obigen Antworten ist richtig.

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällig ausgewählte Auto Mängel aufweist?

Eine korrekte Formel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit lautet: (Gewicht 3)

- $P(E) = \sum_{i=1}^5 P(A_i) * P(E | A_i)$
- $P(E) = \sum_{i=1}^5 P(A_i) * P(A_i | E)$
- Keine der obigen Antworten ist richtig.

Die Wahrscheinlichkeit ist: (Gewicht 1)

- 0,01
- 0,02
- 0,03
- 0,04
- Keine der obigen Antworten ist richtig

- c) Das zufällig ausgewählte Auto weist Mängel auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Auto am Montag produziert wurde?

Eine korrekte Formel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit lautet: (Gewicht 4)

$$P(E | A_1) = \frac{P(A_1) * P(E | A_1)}{\sum_{i=1}^5 P(A_i) * P(E | A_i)}$$

$$P(A_1 | E) = \frac{P(E) * P(E | A_1)}{\sum_{i=1}^5 P(A_i) * P(E | A_i)}$$

$$P(A_1 | E) = \frac{P(A_1) * P(E | A_1)}{\sum_{i=1}^5 P(A_i) * P(E | A_i)}$$

- Keine der obigen Antworten ist richtig

Die Wahrscheinlichkeit ist: (Gewicht 2)

- 0,1
 0,2
 0,3
 0,4
 Keine der obigen Antworten ist richtig

Aufgabe 5: Entscheidungstheoretische Grundlagen

Welche der folgenden Aussagen sind „wahr“ oder „falsch“? (Bitte entsprechendes Feld ankreuzen!) (*Gewicht: jeweils 1*)

	wahr	falsch
Das Entscheidungsmodell, die möglichen Ergebnisse sowie die Prognosefunktion sind Primärdeterminanten, die direkt auf die Entscheidung einwirken.		
Der moderne Homo Oeconomicus ist aufgrund seiner beschränkten Informationsaufnahme- und Informationsverarbeitungskapazität durch beschränkte Rationalität gekennzeichnet.		
Als Ellsberg-artige Verstöße gegen das Unabhängigkeitsaxiom bezeichnet man solche, bei denen subjektive Wahrscheinlichkeiten vorliegen, die Wahl jedoch nicht anhand des mit ihnen ermittelten Erwartungsnutzens getroffen wird.		
Die deskriptive Entscheidungstheorie formuliert empirisch gehaltvolle Hypothesen über das Verhalten von Individuen im Entscheidungsprozess.		
Im Rahmen der Entscheidungen bei Ungewissheit stellt das Hurwicz-Prinzip einen Kompromiss zwischen der Maximax- und der Maximin-Regel dar.		
Für die Gültigkeit des additiven Modells müssen die Bedingungen der einfachen und wechselseitigen Präferenzunabhängigkeit sowie der Differenzabhängigkeit erfüllt sein.		
Der Bandbreiteneffekt und Splitting-Effekt stellen kognitive Verzerrungen bei der Bestimmung von Gewichten dar.		
Eine Entscheidung ist effizient im Sinne von vorteilhaft, wenn die mit ihr verbundenen Vorteile kleiner sind als die mit ihr verbundenen Nachteile.		
Bei ordinal skalierten Daten sind Abstände zwischen den Merkmalsausprägungen interpretierbar.		
Im Axiomensystem nach Luce/Raiffa setzt sich das ordinale Axiom aus dem Ordnungsaxiom und dem Monotonieaxiom zusammen.		

Aufgabe 6: Entscheidungen bei Sicherheit und mehreren Zielen

Im süd-sizilianischen Fischerdorf Marzamemi möchte die einzige Taverne am Marktplatz ihre Außenfassade neu gestalten lassen. Die Restaurantleitung erkennt, dass nur drei unterschiedliche Firmen in die engere Auswahl kommen. Der Tavernenbesitzer Giovanni Pietro Aloisio achtet bei seiner Entscheidung ausschließlich auf folgende drei Attribute: Preis, Zeitdauer und Qualität. Als „Geizhals“ in seiner Nachbarschaft bekannt, ist für Giovanni eine Firma besser als eine andere, wenn sie weniger kostet, schneller arbeitet und die bessere Qualität liefert. Aus seinem BWL-Studium kennt Giovanni noch die sog. Direct-Rating-Methode zur Bestimmung einer auf das Intervall $[0,1]$ normierten Wertfunktion. Er wendet diese Methode an und für die drei Firmen ergeben sich folgende Werte:

	Preis (Euro)	Wert von Preis	Zeitdauer	Wert von Zeitdauer	Qualität	Wert von Qualität
	x_1	$v_1(x_1)$	x_2	$v_2(x_2)$	x_3	$v_3(x_3)$
Firma A	17.500	0,6	1 Woche	1	gut	0,8
Firma B	25.000	0	2 Wochen	0,3	sehr gut	1
Firma C	12.500	1	3 Wochen	0	gering	0

- a) Ermitteln Sie für das o.g. Entscheidungsproblem die Zielgewichte mithilfe des Ihnen bekannten Swing-Verfahrens! (Gewicht: 7)

- b) Für welche Firma würde sich der Tavernenbesitzer Giovanni Pietro Aloisio unter Verwendung des additiven Modells und der von Ihnen unter a) ermittelten Gewichte entscheiden? (*Gewicht: 3*)

Aufgabe 7: Entscheidungen bei Risiko

In einer Entscheidungssituation stehen drei Handlungsalternativen zur Auswahl. Zu welchem Erfolg eine Alternative führt, lässt sich im Zeitpunkt der Entscheidung nicht mit Sicherheit vorhersagen; dies ist abhängig von dem jeweils eintretenden Umweltzustand. Der Entscheider hält zwei Umweltzustände für möglich; deren Eintrittswahrscheinlichkeiten er auf 0,3 und 0,7 schätzt. Die Erfolge, die mit den Handlungsalternativen bei alternativen Umweltentwicklungen erzielt werden können, enthält nachfolgende Tabelle:

	$w_1=0,3$	$w_2=0,7$
	s_1	s_2
a_1	100	10
a_2	120	-10
a_3	80	20

- a) Was können Sie über die Risikoneigung des Entscheiders aussagen und wie hoch sind die Sicherheitsäquivalente, wenn der Entscheider über die Risikonutzenfunktion $u(x) = (x+5)^2$ verfügt? (Gewicht: 7)

b) Ein Entscheider mit der Nutzenfunktion $u(x)=10 \cdot (5x^2+10)$ kann ein Projekt realisieren, bei dem er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 einen Gewinn in Höhe von 10 erzielt und mit der Gegenwahrscheinlichkeit weder gewinnt noch verliert. Das Sicherheitsäquivalent beträgt: (*Bitte ankreuzen!* - Gewicht: 3)

$\sqrt{3}$

$\sqrt{30}$

1

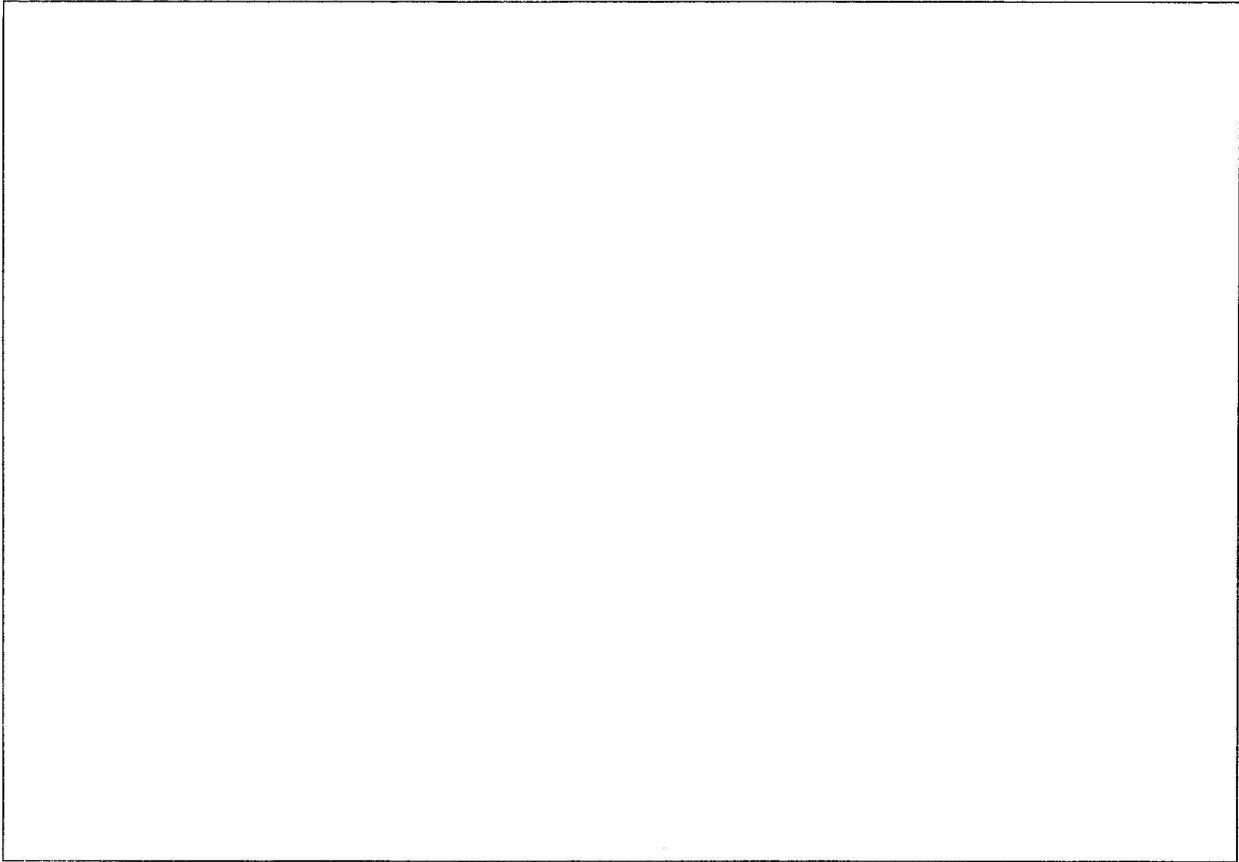
Aufgabe 8: Entscheidungen bei ungenauen Informationen

Folgende LPI-Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

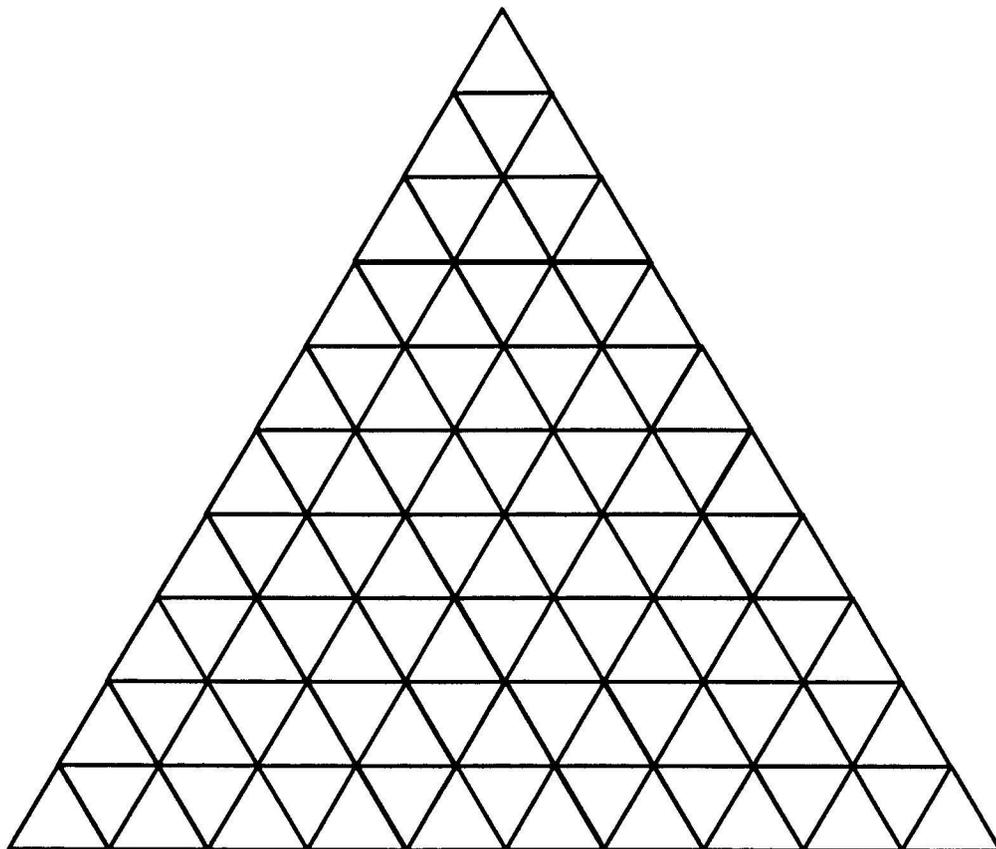
$$LPI(\mathbf{w}) := \begin{pmatrix} 0,1 \leq w_1 \leq 0,7 \\ 0,3 \leq w_2 \leq 0,5 \\ 0,2 \leq w_3 \leq 0,3 \end{pmatrix}$$

a) Überprüfen Sie anhand der nachstehenden Bedingungen, ob die Intervallgrenzen möglicherweise zu weit gefasst sind! (*Gewicht: 6*)

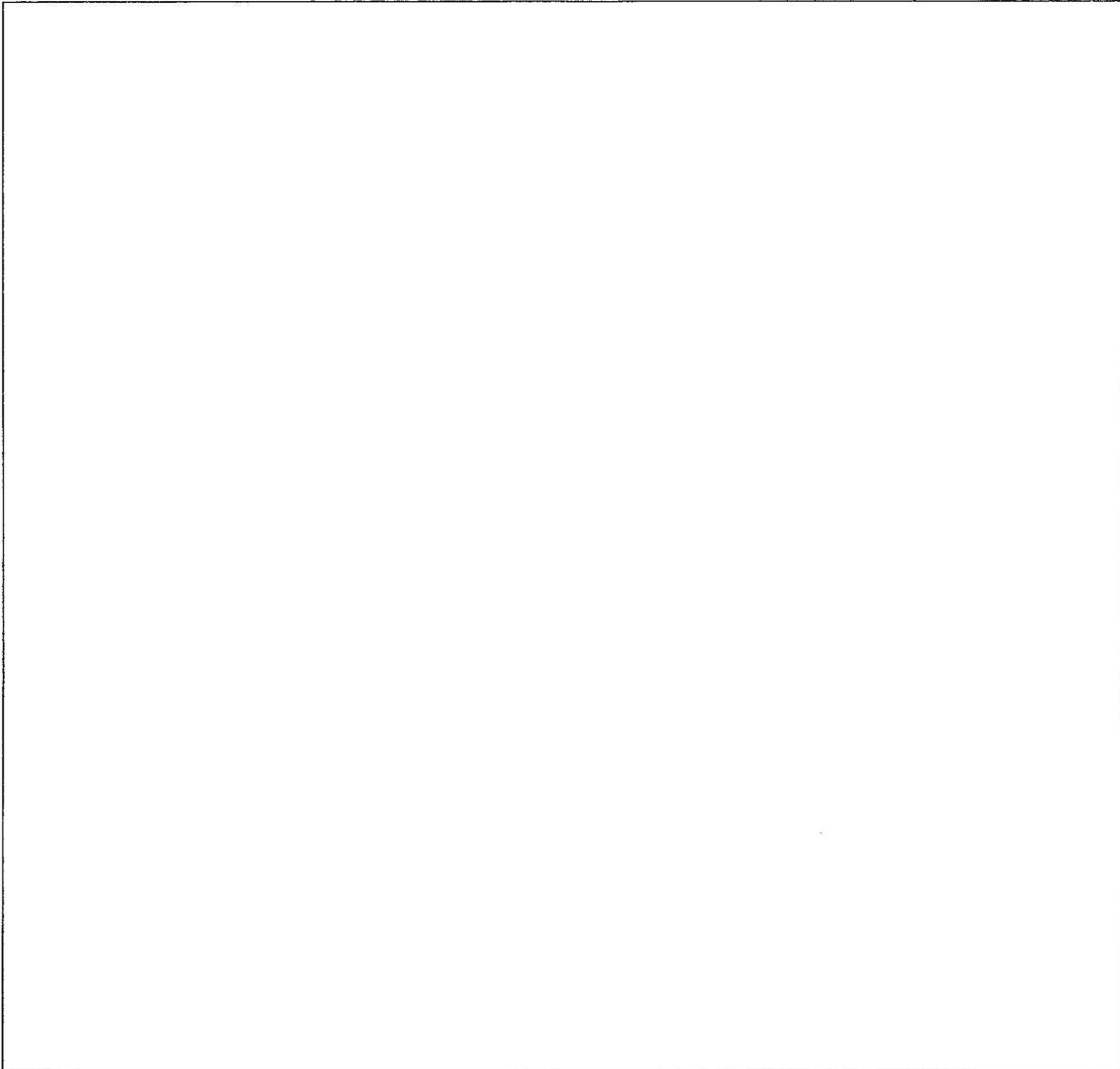
$$(1) \quad \sum_{k'=1}^m \underline{w}_{k'} + (\bar{w}_k - \underline{w}_k) \leq 1 \quad \forall k \in K \quad (2) \quad \sum_{k'=1}^m \bar{w}_{k'} - (\bar{w}_k - \underline{w}_k) \geq 1 \quad \forall k \in K$$



b) Zeichnen Sie die angegebene LPI(w) in das folgende baryzentrische Dreieck ein! (Gewicht: 2)



c) Nennen Sie eine Korrekturmöglichkeit, die die Bedingungen (1) und (2) aus Aufgabenteil a) erfüllt. Geben Sie explizit die entsprechenden LPI-Wahrscheinlichkeiten an! (*Gewicht: 2*)



Aufgabe 9: Choquet-Erwartungswerte

Ein Entscheider steht vor dem Problem, aus einer Menge von Investitionsalternativen (a_1 , a_2 und a_3) die beste Alternative auszuwählen. Der Entscheider hält 3 Umweltzustände (s_k , $k=1,2,3$), denen er Kapazitäten $\pi(s_k)$ zuordnen kann, für möglich. Die Erfolge, die mit den Investitionsalternativen bei alternativen Umweltentwicklungen erzielt werden und die Kapazitäten $\pi(s_k)$, enthält die nachfolgende Tabelle:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$\pi(s_k)$	0,47	0,29	0,58
a_1	40	0	60
a_2	60	40	25
a_3	-10	100	20

a) Berechnen Sie die Choquet-Erwartungswerte unter der Annahme, dass der Entscheider die Kapazitäten wie folgt wählt: (Gewicht: 9)

$$\pi(s_1 \cup s_2) = 0,86, \quad \pi(s_1 \cup s_3) = 0,65 \text{ und } \pi(s_2 \cup s_3) = 0,73$$

b) Für die deskriptive Entscheidungstheorie sind die Aspekte menschlichen Entscheidungsverhaltens von großer Relevanz. Erläutern Sie den sog. Disappointment-Effekt! (*Gewicht: 5*)

c) In seinem Lebensmittelfachgeschäft im beschaulichen Cashagen verkauft Karl Brock seit Jahren den in Ostholstein beliebten Elbwurm, den er selber zubereitet und verpackt. Nun möchte er sein Sortiment erweitern und ihm wurden drei verschiedene Angebote A_1 , A_2 und A_3 unterbreitet. Jedoch ist der mit der Wahl eines Angebotes verbundene Gewinn vom eintretenden Umweltzustand abhängig. Insgesamt hält Karl Brock vier Umweltzustände für möglich ($k=1, \dots, 4$). Die Eintrittswahrscheinlichkeiten der betrachteten Umweltzustände kann er lediglich in Form von Intervallen angeben. Das gesamte Entscheidungsproblem kann Karl in der folgenden Entscheidungsmatrix abbilden:

	k=1	k=2	k=3	k=4
$w_k \in$	[0,1;0,4]	[0,2;0,5]	[0,3;0,6]	[0,1;0,6]
A_1	4	0	6	2
A_2	6	2	4	-1
A_3	-1	4	2	7

Karl verfolgt das Ziel der Maximierung des Erwartungswertes.

Welche Alternative wählt er, wenn er von der **günstigsten** Verteilung der Eintrittswahrscheinlichkeiten ausgeht? (*Bitte ankreuzen! Gewicht: 6*)

- A_1
 A_2
 A_3
 Paul ist indifferent zw. A_1 und A_2

Ende!