Klausur: Entscheidungstheorie, Wahrscheinlichkeit und Risiko

Prüfer: **Spengler, Vogt**

Datum: **27. Juli 2012**

Prüfungs-Nr.: **11014**

Name: .... **Vorname:** ....

Matr.-Nr.: .... **Fakultät:** ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamtpunkte	Note
Punkte									

Unterschrift der Prüfer: ....

....

Als Hilfsmittel sind zugelassen: -Nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Datenverarbeitungsfunktion (lt. Aushang des Prüfungsamtes)

- Sechs nicht kopierte, handbeschriebene Blätter nach eigener Wahl; diese sind mit den Klausurheften abzugeben.

Hinweise:

1. Bitte tragen Sie zuerst Ihre persönlichen Daten ein!
2. Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten!
3. Bei Aufgaben mit mehreren vorgegebenen Antwortmöglichkeiten ist genau eine Antwort richtig.
4. Die pro Aufgabe erreichbaren Punkte sind hinter der jeweiligen Aufgabenstellung notiert.
5. Die Klausur ist bei 50% der Gesamtpunktzahl auf jeden Fall bestanden.
6. Nachstehend finden Sie die Aufgabensammlung mit integrierten Lösungsfeldern. Geben Sie Ihre Antworten bitte sorgfältig in den dafür vorgesehenen Bereichen an! Wenn Sie zu einer Aufgabe mehr als eine Antwort markieren oder angeben, wird diese als falsch bewertet. Falls Sie eine Korrektur vornehmen müssen, kennzeichnen Sie diese bitte deutlich!
7. Das Klausurheft besteht aus diesem Deckblatt (2 Seiten) plus 7 Aufgaben (insges. 15 Seiten); bitte zählen Sie nach! Die Heftung darf nicht gelöst werden!
8. Zusätzlich erhalten Sie Papier für eventuelle Nebenrechnungen. Dieses ist nach Klausurende mit dem Aufgabenheft und den von Ihnen möglicherweise mitgebrachten handschriftlichen Blättern vollständig abzugeben!
9. Alle numerischen Ergebnisse sind auf zwei Stellen genau gerundet.
10. Sie sind dafür verantwortlich, dass das Aufsichtspersonal Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit erhält!

Viel Erfolg!!!!!!!

1. Aufgabe: Quer durch den Gemüsegarten (15 Punkte)

Ein sechsseitiger, fairer Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Dabei sind folgende Ereignisse gegeben

A: Die beiden Augenzahlen sind verschieden

B: Die Augensumme ist größer 8

C: Die zweite Augenzahl ist kleiner als die erste

D: Die Augenzahl beider Würfe ist ungerade

Geben Sie Ihre Ergebnisse und nur diese in den dafür vorgesehenen Kästchen an. Sollten numerische Ergebnisse ermittelt werden, runden Sie diese immer auf zwei Nachkommastellen.

a) Geben Sie alle möglichen Elementarereignisse für das zwei Mal wiederholte Werfen eines Würfels an. **1 Punkt**

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P((A \cup D) \cap B)$ an. **1 Punkt**

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P((A \cap C) \cap B)$ an. **1 Punkt**

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(D \mid B)$. **1 Punkt**

Im Folgenden sei die Zufallsvariable X die Augenzahl des ersten Wurfs, Y die Augenzahl des zweiten Wurfs. Zudem sei die Zufallsvariable $Z = X + Y$ gegeben. Der Korrelationskoeffizient von X und Y ist 0.

e) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$. **2 Punkte**

f) Ermitteln Sie die Standardabweichung von Y. **3 Punkte**

g) Ermitteln Sie die Covarianz von X und Y. **2 Punkte**

h) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(Z)$. **2 Punkte**

i) Ermitteln Sie die Varianz von Z. **2 Punkte**

2. Aufgabe: Wahrscheinlichkeitsrechnung (20 Punkte)

Das Bundesministerium für Gesundheit untersuchte den Zusammenhang zwischen Tod bei sportlichen Betätigungen (schwimmen, radfahren, joggen, ...) und Herzkreislauferkrankungen. Dabei wurde herausgefunden, dass bie Herzkreislaufpatienten die Sterbewahrscheinlichkeit pro Jahr 20% ist, wenn Herzkreislaufpatienten sich körperlich betätigen. Jedes Jahr sterben 2.500 Herzkreislaufpatienten bei sportlichen Betätigungen.

a) Berechnen Sie wie viele Herzkreislaufpatienten sich sportlich betätigen. **2 Punkte**

b) Berechnen Sie, wie viele Jahre sich ein Herzkreislaufpatient (mindestens) sportlich betätigen muss um mit der Wahrscheinlichkeit von 80% zu sterben. **3 Punkte**

Es ist allgemein bekannt, dass man nach dem Essen zwei Stunden warten sollte, ehe man schwimmen geht. Menschen, die sich nicht an diese Regel halten, laufen Gefahr im Wasser zu ertrinken. Daher plant die Bundesregierung den Verkauf von Lebensmitteln an Freibädern zu untersagen.

Das Bundesministerium für Gesundheit untersucht daher die Sterbefälle der Jahre 2000 bis 2010 in deutschen Schwimmbädern. Dabei werden folgende Daten erhoben: (1) Jährlich kommt es zu 100.000 Schwimmbadbesuchen (2) Jährlich ertrinken im Mittel 500 Menschen bei einem Schwimmbadbesuch. (3) 60% der Ertrunkenen haben vorher Eis gegessen (4) 50% der Ertrunkenen haben vor dem Ertrinken Curry Wurst gegessen. (5) 40% der Ertrunkenen haben Eis und Curry Wurst gegessen. (6) Außer Curry Wurst und Eis wird im Schwimmbad nichts gegessen. (7) 70% aller Schwimmbadbesucher essen etwas.

Geben Sie Ihre Ergebnisse und nur diese in den dafür vorgesehenen Kästchen an. Sollten numerische Ergebnisse ermittelt werden, runden Sie diese immer auf zwei Nachkommastellen.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der ein Ertrunkener vor dem Ertrinken etwas gegessen hat. **2 Punkte**

d) Geben Sie an, ob die Ereignisse „Essen vor Ertrinken" und „Essen bei Schwimmbadbesuch" unabhängig sind. Schreiben Sie dafür in das folgende Kästchen „unabhängig" oder „abhängig". **1 Punkt**

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit im Schwimmbad zu Ertrinken, wenn vorher etwas gegessen wurde. **5 Punkte**

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit im Schwimmbad zu Ertrinken, wenn vorher nichts gegessen wurde. **5 Punkte**

g) Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen sich von den Ergebnissen ableiten lassen. **2 Punkte**

1. Um dem Ertrinken Einhalt zu gebieten sollte sichergestellt werden, dass alle Badegäste etwas essen. Dafür sollten Kioske in Schwimmbädern subventioniert werden.
2. Essen vor dem Schwimmen ist gesundheitsschädlich. Es sollte verboten werden.
3. Keine der Empfehlungen ist richtig. Es gibt keinen Zusammenhang zwischen Ertrinken im Schwimmbad und Essen.

Geben Sie im folgenden Kästchen die Nummern vor den richtigen Aussagen an.

3. Aufgabe: Zufallsvariablen (25 Punkte)

Gegeben sei die folgende Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{für} \quad 0 \le x < a \\ 0{,}5 & \text{für} \quad a \le x < 10 \\ 0{,}0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie Ihre Ergebnisse und nur diese in den dafür vorgesehenen Kästchen an. Sollten numerische Ergebnisse ermittelt werden, runden Sie diese immer auf zwei Nachkommastellen.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion für X. **6 Punkte**

b) Berechnen Sie den Wert von a. **5 Punkte**

Gegeben sei weiterhin eine stetige Zufallsvariable Y mit dem Erwartungswert. Für Y gilt:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 0{,}8 & \text{für} \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y. **5 Punkte**

d) Bestimmen Sie die Varianz von Y. **5 Punkte**

e) Gelten eine oder mehrere der folgenden Aussagen allgemein für die Zufallsvariable A gelten. Wenn ja, geben Sie an welche. **2 Punkte**

1. $E(a\,A + b) = a\,E(A) + b$ mit a, b sind Konstanten
2. $E(A)$ ist niemals 0
3. $E(A)$ ist bei stetigen Zufallsvariablen immer positiv
4. $E(A)$ ist bei diskreten Zufallsvariablen immer Element der Trägermenge.
5. Keine der angegebenen Alternativen

f) Gelten eine oder mehrere der folgenden Aussagen allgemein für die Zufallsvariablen A und B. Wenn ja, geben Sie an welche. **2 Punkte**

1. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$
2. $E\big((X, Y)\big) = \big(E(X), E(Y)\big)$
3. $E\big((X, Y)\big) = \big(E(X) + E(Y)\big)$
4. $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
5. Keine der angegebenen Alternativen

4. Aufgabe: Grundlagen (24 Punkte)

a) Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit und kreuzen Sie entsprechend im Feld **„wahr"** oder **„falsch"** an! **24 Punkte**

	wahr	falsch
Prognosefunktion, Zielfunktion und die Merkmale der Umwelt gehören zu den Primärdeterminanten der Entscheidung.		
Zwischen den betriebswirtschaftlichen Maßnahmen und den beabsichtigten (Haupt-) Wirkungen und unbeabsichtigten (Neben-) Wirkungen besteht ein Kausalitätszusammenhang.		
Von isomorphen Abbildungen wird gesprochen, wenn Strukturgleichheit zwischen Modell und Realität besteht.		
Entscheidungsmodelle, die dem konstruktivistischen Modellbegriff entsprechen, weisen keine Struktur per se auf.		
Eine Entscheidung, die zweckrational ist, kann nicht gleichzeitig wertrational sein.		
Die normative Entscheidungstheorie beschäftigt sich mit Fragestellungen, wie Individuen tatsächlich entscheiden.		
Nimmt der Optimismusparameter β des Hurwicz-Prinzips Werte kleiner 0,5 an, dann handelt es sich um Entscheidungsträger mit optimistischen Zukunftserwartungen.		
Nach dem Reduktionsprinzip ist eine „zusammengesetzte" Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Ergebnisse äquivalent zu einer „einfachen" Wahrscheinlichkeitsverteilung, sofern jedes Ergebnis bei beiden Verteilungen jeweils unterschiedliche Eintrittswahrscheinlichkeit aufweist.		

	wahr	falsch
Bei Risikoscheu gilt, dass der Erwartungswert des Ergebnisses kleiner als das Sicherheitsäquivalent des Ergebnisses ist.		
Das ordinale Prinzip setzt sich aus dem Ordnungsaxiom und dem Transitivitätsaxiom zusammen.		
Sind Aussagen über die Stärke der Präferenz möglich und gilt: $v(b) - v(a) > v(d) - v(c) \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \succ (c \rightarrow d)\ mit\ a, b, c, d \in A$, so liegt eine nicht messbare Wertfunktion vor.		
Die Theorie des antizipierten Nutzens unterstellt eine monoton steigende Transformationsfunktion, die im Intervall [0, 1] definiert ist.		
Wird ein Entscheidungsträger mit einem Mehrzielentscheidungsproblem konfrontiert, so erfordert eine wertrationale Bewertung der Alternativen eine multiattributive Wertfunktion.		
Kapazitäten sind Maße, die immer die σ-Additivitätsbedingung erfüllen.		
Verstöße gegen das Unabhängigkeitsaxiom mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten werden als ellsbergartig und Verstöße mit ungenauen Wahrscheinlichkeiten werden als allaisartig bezeichnet.		
Hängt der Variationsbereich (d.h. die Grenzen bzw. Restriktionen) für die Entscheidungsvariablen mindestens eines Bereiches von den Ausprägungen der Entscheidungsvariablen in einem anderen Bereich ab, so liegt zwischen beiden Entscheidungsbereichen ein Erfolgsverbund vor.		

5. Aufgabe: Entscheidung bei Unsicherheit i.e.S. (12 Punkte)

Das Management der Firma „Fix und Foxi" möchte am Konjunkturaufschwung teilhaben und bezieht für die Expansion des Unternehmens folgende Investitionsprojekte (A_1, A_2, A_3, A_4) in ihr Entscheidungskalkül ein. Des Weiteren kann das Management die Gewinne der einzelnen Alternativen A_a im jeweils betrachteten Umweltzustand S_s in der Gewinnmatrix (s. *Tab. 1*) wie folgt abbilden.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	2.200	950	2.000	1.250	950
A_2	1.100	1.250	1.600	1.700	650
A_3	2.250	900	1.800	1.500	1.000
A_4	2.000	1.500	1.600	1.700	800

Tab. 1: Gewinnmatrix

a) Welche Alternative wählt das Management, wenn es sich an der Niehans-Savage-Regel orientiert?
(Bitte ankreuzen!) **5 Punkte**

☐ A_1 ☐ A_2 ☐ A_3

☐ A_4 ☐ Keine der Antworten ist richtig.

b) Darüber hinaus wird die Unternehmensberatung McKingley Consulting beauftragt, sich mit dem Entscheidungsproblem auseinanderzusetzen. Die Berater von McKingley empfehlen dem Management, sich bei der Wahl eines Investitionsprojektes am Hurwicz-Prinzip zu orientieren.
Welches Investitionsprojekt wird realisiert, wenn das Management von einem Optimismusparameter α in Höhe von 0,4 ausgeht?
(Bitte ankreuzen!) **3 Punkte**

☐ A_1 ☐ A_2 ☐ A_3

☐ A_4 ☐ Keine der Antworten ist richtig.

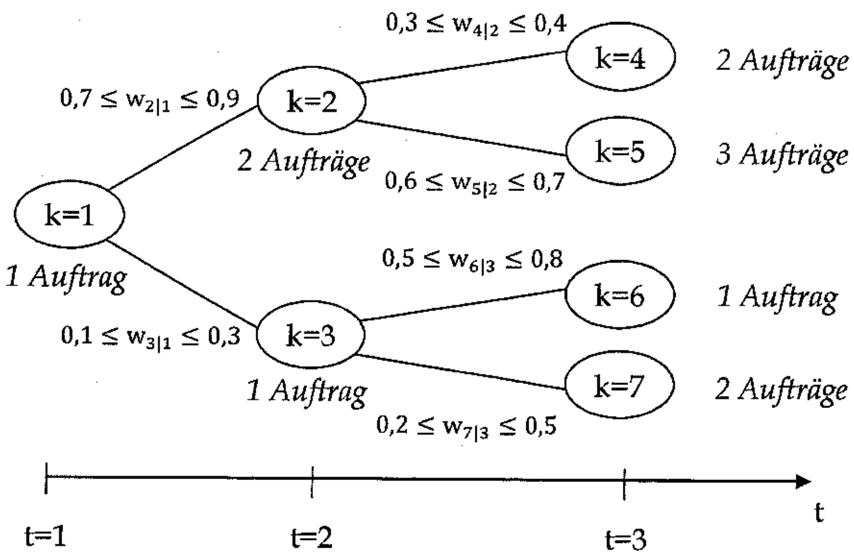
c) Bestimmen Sie, welchen Wert der Optimismusparameter α annehmen muss, damit die Unternehmensleitung der Firma „Fix und Foxi" indifferent zwischen Alternative A_1 und Alternative A_3 ist!
(Bitte ankreuzen!) **4 Punkte**

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$

☐ Keine der Antworten ist richtig.

6. Aufgabe: Entscheidungen bei zeitlichen Interdependenzen (8 Punkte)

Ein Unternehmen hat in einem drei Perioden umfassenden Planungszeitraum Entscheidungen über Auftragsannahmen zu treffen. Über die Auftragsentwicklung liegen Wahrscheinlichkeitsintervalle vor. Die Startzeitpunkte der einzelnen Perioden werden mit t=1, 2, 3 bezeichnet; nur in diesen Zeitpunkten können Aufträge eingehen und Entscheidungen getroffen werden. Der nachstehende Zustandsbaum stellt die künftige Auftragsentwicklung mit den korrespondierenden Wahrscheinlichkeitsintervallen dar:



Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten der vier Zustandsfolgen!

1. Bedingte Wahrscheinlichkeit $w^*_{4|2}$
   (Bitte ankreuzen!) **2 Punkte**

   - ☐ $0{,}27 \leq w^*_{4|2} \leq 0{,}28$
   - ☐ $0{,}21 \leq w^*_{4|2} \leq 0{,}36$
   - ☐ $0{,}16 \leq w^*_{4|2} \leq 0{,}28$
   - ☐ Keine der Antworten ist richtig.

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit $w^*_{5|2}$
(Bitte ankreuzen!) **2 Punkte**

- ☐ $0{,}54 \leq w^*_{5|2} \leq 0{,}63$
- ☐ $0{,}49 \leq w^*_{5|2} \leq 0{,}54$
- ☐ $0{,}42 \leq w^*_{5|2} \leq 0{,}63$
- ☐ Keine der Antworten ist richtig.

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit $w^*_{6|3}$
(Bitte ankreuzen!) **2 Punkte**

- ☐ $0{,}15 \leq w^*_{6|3} \leq 0{,}24$
- ☐ $0{,}05 \leq w^*_{6|3} \leq 0{,}08$
- ☐ $0{,}05 \leq w^*_{6|3} \leq 0{,}24$
- ☐ Keine der Antworten ist richtig.

4. Bedingte Wahrscheinlichkeit $w^*_{7|3}$
(Bitte ankreuzen!) **2 Punkte**

- ☐ $0{,}02 \leq w^*_{7|3} \leq 0{,}15$
- ☐ $0{,}05 \leq w^*_{7|3} \leq 0{,}06$
- ☐ $0{,}06 \leq w^*_{7|3} \leq 0{,}15$
- ☐ Keine der Antworten ist richtig.

<u>7. Aufgabe:</u> Entscheidungen bei ungenauen Informationen (16 Punkte)

Rudi Ratlos muss aus drei ihm zur Verfügung stehenden Alternativen (A_1, A_2, A_3) eine auswählen. Das mit der Wahl einer Alternative verbundene Ergebnis hängt vom eintretenden Umweltzustand ab. Insgesamt hält Rudi vier Umweltzustände für möglich $(k = 1,...,4)$. Die Eintrittswahrscheinlichkeiten der betrachteten Umweltzustände kann er lediglich in Form von Intervallen angeben. Das gesamte Entscheidungsproblem kann Rudi in der folgenden Entscheidungsmatrix abbilden.

	k=1	*k*=2	*k*=3	*k*=4
$w_k \in$	[0,3: 0,5]	[0,1: 0,4]	[0,2: 0,7]	[0,1: 0,3]
A_1	60	40	90	80
A_2	100	30	90	-10
A_3	50	80	100	40

Entscheidungsmatrix

Aus Vorlesungen weiß Rudi Ratlos, dass derartige Entscheidungsprobleme u. a. mit dem LPI-Hurwicz-Prinzip gelöst werden können. Rudi verfolgt das Ziel der Maximierung des Erwartungswertes.

a) Welche Alternative wählt Rudi Ratlos, wenn er von der **ungünstigsten** Verteilung der Eintrittswahrscheinlichkeiten ausgeht?
(Bitte ankreuzen!) **6 Punkte**

☐ A_1 ☐ A_2 ☐ A_3

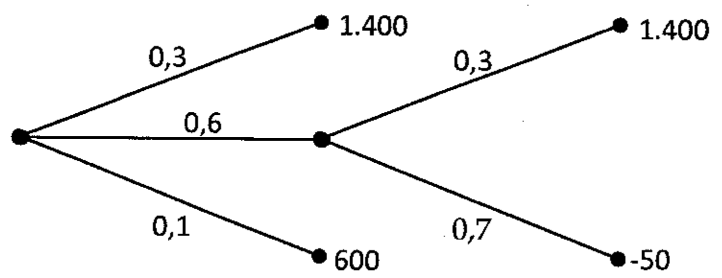
☐ Rudi ist indifferent zwischen A_1 und A_3. ☐ Keine der Antworten ist richtig.

b) Welche Alternative wählt Rudi Ratlos, wenn er von der **günstigsten** Verteilung der Eintrittswahrscheinlichkeiten ausgeht?
(Bitte ankreuzen!) **6 Punkte**

☐ A_1 ☐ A_2 ☐ A_3

☐ Rudi ist indifferent zwischen A_1 und A_3. ☐ Keine der Antworten ist richtig.

c) Gegeben sei folgende Lotterie:



Notieren Sie eine Lotterie die gemäß dem Reduktionsaxiom der o. g. Lotterie gleichwertig ist!
Nutzen Sie hierfür die unten angegebenen Lösungsfelder! **4 Punkte**