Original

Prof. Dr. Rainer Schwabe
Dipl.-Math. Tobias Mielke
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Stochastik

18. 02. 2009

Klausur - Schätzen und Testen - Wintersemester 2008/09

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, für die jeweils eine maximale Anzahl von Punkten erreichbar ist. Insgesamt sind maximal 35 Punkte erreichbar. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie insgesamt mindestens 14 Punkte erreicht haben.
- Der Multiple-Choice-Teil (Aufgabe 1) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet. Falsche Antworten im Multiple-Choice-Teil werden mit einem halben Minuspunkt bewertet. Für richtige Antwortet bekommt man einen Pluspunkt. Nicht beanwortete Teilaufgaben werden nicht gewertet.
- Die Lösung einer Aufgabe (außer Aufgabe 1) bedeutet nicht einfach die Angabe eines Ergebnisses, sondern erfordert Begründungen, die den Lösungsweg nachvollziehbar machen. Es wird gegebenenfalls auch eine Interpretation des Ergebnisses gefordert. Bitte markieren Sie deutlich in den Lösungen, wo eine Aufgabe beginnt und wo sie endet.
- Vergessen Sie nicht, das beiliegende Arbeitsblatt zu beschriften und Ihren Lösungen hinzuzufügen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
In jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwort richtig.

a) Es gilt:

- ☐ $E(X) \leq E(Y) \Rightarrow X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle ω.
- ☐ Für X, Y unabhängig gilt: $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$.
- ☐ Unkorrelierte Zufallsvariablen sind unabhängig.
- ☐ Aus $E(X) = 0$ folgt $Var(X) = 0$, da $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0$.
- ☐ Für Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ entspricht der Erwartungswert dem Median.

b) Sei X eine stetige Zufallsvariable. Dann gilt:

- ☐ Die Dichte ist nicht größer als 1, weil sie die Wahrscheinlichkeit ist.
- ☐ Die Verteilungsfunktion F_X hat Sprünge.
- ☐ $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- ☐ $F_X(b) = \sum_{i=-\infty}^{b} f_X(i)$.
- ☐ Man kann den Verlauf von X ohne Absetzen des Stiftes zeichnen.

Original

c) Es gilt:

☐ Im Normalverteilungsmodell gilt für den erwartungstreuen Schätzer $\bar{X}$ des Erwartungswertes μ:

$$P(\bar{X} = \mu) > 0$$

☐ Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\sigma}^2$ ist immer kleiner als die Varianz σ^2, da gilt

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 < \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

und s^2 erwartungstreu für die Varianz ist.

☐ Wenn $\hat{\theta}$ ein eindeutiges Maximum der Likelihood-Funktion $L(\theta; x)$ zu Beobachtungen x ist, dann maximiert $\hat{\theta}$ auf jeden Fall auch die Log-Likelihood-Funktion $ln(L(\theta; x))$.

☐ Im Normalverteilungsmodell gilt für erwartungstreue Schätzer des Erwartungswertes:

$$E(\mu) = \bar{X}.$$

☐ Erwartungstreue Schätzer sind effizienter als Schätzer mit einem $Bias \neq 0$.

d) Es gilt:

☐ Je größer α, umso größer ist das Konfidenzniveau.

☐ Konfidenzintervalle werden mit zunehmendem Stichprobenumfang größer, da extremere Ereignisse mit größerer Wahrscheinlichkeit eintreten.

☐ Für $n \geq 30$ haben t-Verteilte und Normalverteilte Zufallsvariablen die gleiche Verteilungsfunktion.

☐ $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle sind größer als die zugehörigen $(1-\alpha)$-Vorhersagebereiche.

☐ Je kleiner $(1-\alpha)$, umso kürzer ist das zugehörige Konfidenzintervall.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Zufallsvariable X beschreibe die Elastizität der Gummibärchen Ihrer Firma (Streckfaktor, bis zu dem das Gummibärchen nicht zerreißt). X besitze die folgende Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

mit Parametern $\alpha, \beta > 0$. Die folgenden Werte wurden in Ihrer Qualtitätskontrolle beobachtet: 2.33 1.67 1.83 2.17 1.93. Es sei $\beta = 2$ bekannt.

a) Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für α an und berechnen Sie die ML-Schätzung für α aus den Daten.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X für allgemeines $\alpha > 0$ an. Berechnen Sie für $\alpha = 0.3$

   (i) $P(X > 1.0)$,

   (ii) $P(X \leq 2.5)$ und

   (iii) $P(X \leq 2.5 | X > 1.0)$.

Hinweis: $\int_a^b g'(x)e^{g(x)}\mathrm{d}x = e^{g(x)}\big|_a^b$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Die Labore A und B schätzen unabhängig voneinander den Streckfaktor μ der Gummibärchen. Die Schätzer $\hat{\mu}_A$ und $\hat{\mu}_B$ für den Streckfaktor sind bei beiden Laboren erwartungstreu, jedoch unterscheiden sie sich in der Standardabweichung. Es ist bekannt, dass der Schätzer des Labores B eine 5-mal so große Varianz besitzt, wie der Schätzer des Labores A. Sie nutzen die Ergebnisse der Labore um eigene Schätzer zu betrachten:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}\hat{\mu}_A + \frac{1}{2}\hat{\mu}_B, \text{ bzw. } \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}\hat{\mu}_A + \frac{2}{3}\hat{\mu}_B, \text{ bzw. } \hat{\mu}_3 = \hat{\mu}_A$$

a) Welche der Schätzer $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ und $\hat{\mu}_3$ sind erwartungstreu?

b) Ordnen Sie die drei Schätzer $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ und $\hat{\mu}_3$ nach ihrer Effizienz.

c) Gibt es einen Schätzer, der noch effizienter als der beste der drei angegebenen Schätzer $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ und $\hat{\mu}_3$ ist? Geben Sie diesen gegebenenfalls an.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Bei einer Umfrage zum Thema „Zufriedenheit am Arbeitsplatz" äußerten 393 von 487 befragten jungen Mitarbeitern ($\leq$40 Jahre) und 374 von 496 befragten älteren Mitarbeitern (>40 Jahre), dass sie am Arbeitsplatz zufrieden seien.

a) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 10\%$ die Behauptung, dass anteilsmäßig gleich viele junge Mitarbeiter und ältere Mitarbeiter an ihrem Arbeitsplatz zufrieden sind.

b) Angenommen 29% der älteren Mitarbeiter sind an ihrem Arbeitsplatz nicht zufrieden. Mit welcher ungefähren Wahrscheinlichkeit beantworten mehr als 373 von 496 befragten älteren Mitarbeitern, dass sie zufrieden seien?

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Zwei Bäckereien im Stadtteil Sudenburg konkurrieren um den Namen „Sudenburger Brötchenkönig". Dazu wurden an 10 verschiedenen Samstagen die folgenden Verkaufszahlen notiert, wobei x_i die Anzahl verkaufter Brötchen der Bäckerei „A" und y_i die Anzahl verkaufter Brötchen der Bäckerei „B" am Samstag i bezeichne:

Samstag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	312	290	287	301	305	285	298	303	310	286
y_i	315	283	280	312	312	282	306	298	315	282

Aus dieser Stichprobe ergeben sich die folgenden Maßzahlen:

$$\bar{x} = 297.7,\ s_x = 10.1111,\ \bar{y} = 298.5,\ s_y = 15.2480,\ s_{x-y} = 6.7462,\ s = 12.9370$$

a) Treffen Sie geeignete Annahmen und testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.1$, ob zwischen den beiden Bäckereien in Hinblick auf die Verkaufszahlen der Brötchen ein signifikanter Unterschied besteht.

b) Berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Samstags-Verkaufszahlen der Brötchen der Bäckerei „B".

Aufgabe 6 (8 Punkte)
Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen dem Alter von Radfahrern (x_i) und ihrer Durchschnittsgeschwindigkeit (y_i in km/h) auf einer Einzelzeitfahretappe der Tour de France. Dabei wurden von 10 Fahrern die folgenden Werte notiert:

Alter x_i	27	23	24	31	18	38	26	19	21	33
Geschwindigkeit y_i	38.3	41.2	40.3	39.3	41.4	38.2	39.2	41.8	40.1	38.7

Aus diesen Daten ergeben sich die folgenden Maßzahlen:

$$\bar{x} = 26.00,\ \bar{y} = 39.85,\ s_x^2 = 41.1111,\ s_y^2 = 1.7183,\ s_{xy} = -7.1556.$$

a) Berechnen Sie den (Pearsonschen) Korrelationskoeffizienten und testen Sie auf Unkorreliertheit zum Niveau $\alpha = 0.1$.

b) Passen Sie eine Regressionsgerade für die Durchschnittsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von dem Alter an und interpretieren Sie die Parameter, soweit diese sinnvoll sind.

c) Eine alte Radlerweisheit besagt: „Mit jedem Jahr verliert man $0.1km/h$". Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.05$ ob die Steigung signifikant von „-0.1" abweicht.

d) Überraschenderweise hat sich zur neuen Saison der ehemalige Radprofi „Jan Beinstark" angemeldet. Er wird zum Zeitpunkt des Rennens 37 Jahre alt sein. Machen Sie eine Vorhersage (Punktschätzung) für seine Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Einzelzeitfahretappe und berechnen Sie ein 95% Vorhersageintervall für seine Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Einzelzeitfahretappe.