Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre VIII
- Management Science -
Prof. Dr. Gerhard Wäscher

# Klausur zur Lehrveranstaltung

# Graphen – Probleme, Methoden, Anwendungen (2182)

## 1. August 2005

**Name:** ...................... **Vorname:** .................... **Matrikelnummer:** ..................

Allgemeine Hinweise:

1. Schreiben Sie nach Ausfüllen dieses Deckblattes nochmals auf alle Ihnen ausgehändigten Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!
2. Lassen Sie bitte zur Erleichterung der Korrektur einen genügend breiten, unbeschrifteten Rand (mindestens 4 cm)!
3. Kontrollieren Sie vor Beginn der Bearbeitung der Klausur die Vollständigkeit des Aufgabentextes! Der Aufgabentext umfasst 4 Aufgaben, von denen alle zu bearbeiten sind. Das Lösen der Heftklammern ist nicht gestattet und wird als Täuschungsversuch geahndet.
4. Schreiben Sie leserlich und nummerieren Sie die verwendeten Seiten. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Verwenden Sie nur Schreibgeräte mit dokumentenechter Tinte. Korrekturstifte sowie Rotstifte sind nicht zugelassen.
5. Geben Sie zu jeder Aufgabe den Lösungsweg an, für die isolierte Präsentation richtiger Endergebnisse werden keine Punkte vergeben.
6. Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgeräte, nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Textverarbeitungsfunktion, Wörterbücher.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte erreichbar | 13 | 11 | 10 | 16 | 50 |

**Aufgabe 1** (13 Punkte)

Ein dynamisches, deterministisches Bestellmengenproblem sei in einem aus sechs Teilperioden bestehenden Planungszeitraum durch die folgenden Bedarfsmengen charakterisiert:

| Teilperiode | t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bedarf (in Stück) | $n_t$ | 500 | 650 | 450 | 700 | 550 | 600 |

Der Bestellkostensatz (Kosten pro Bestellung) betrage 1500,- Euro und der Lagerkostensatz (Kosten der Lagerung einer Mengeneinheit für die Dauer einer Teilperiode) 2,- Euro. Es sollen die entscheidungsrelevanten Gesamtkosten des Planungszeitraums minimiert werden. Sowohl der Lageranfangsbestand als auch der Lagerendbestand seien gleich Null. Es wurden folgende Kosten für die sinnvollen Teilpolitiken ermittelt:

| t \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1500 | 2800 | 4600 | 8800 | 13200 | 19200 |
| 2 | | 1500 | 2400 | 5200 | 8500 | 13300 |
| 3 | | | 1500 | 2900 | 5100 | 8700 |
| 4 | | | | 1500 | 2600 | 5000 |
| 5 | | | | | 1500 | 2700 |
| 6 | | | | | | 1500 |

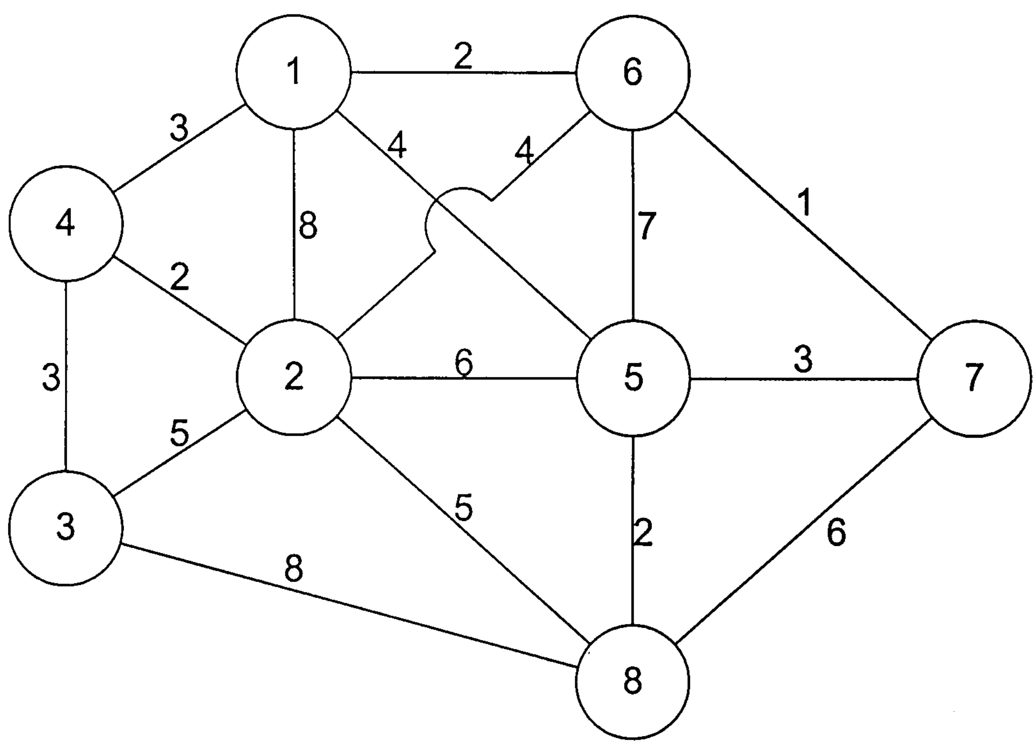
Mit t sei die Teilperiode bezeichnet, zu deren Beginn eine Bestellung durchgeführt wird, und j sei die letzte Teilperiode, deren Bedarf durch die Bestellung in Teilperiode t noch gedeckt wird.

a) Bilden Sie das beschriebene Bestellmengenproblem in einem graphentheoretischen Modell ab! Bestimmen Sie mit Hilfe eines Ihnen bekannten Algorithmus eine optimale Lösung! Geben Sie auch die entsprechende Bestellpolitik und die zugehörigen Gesamtkosten an!

b) Welchen Algorithmus haben Sie zur Lösung der Teilaufgabe a) verwendet? Welche Eigenschaften muss ein Graph grundsätzlich aufweisen, damit Sie diesen Algorithmus verwenden können? Welche Rechenzeitkomplexität weist dieser Algorithmus auf?

**Aufgabe 2** (11 Punkte)

Gegeben sei der folgende Graph:




a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Prim-Algorithmus einen minimalen 1-Baum sowie den zugehörigen minimalen Wert dieses 1-Baums!

b) $|E| = n$ sei die Anzahl der Knoten des Ausgangsgraphen. Nach wie vielen Schritten endet in diesem Fall der Prim-Algorithmus? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Welche Eigenschaften besitzt ein 1-Baum?

**Aufgabe 3** (10 Punkte):

Zeigen Sie formal, dass sich die Zielfunktion $x_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ eines linearen Zuordnungsproblems äquivalent in folgende Zielfunktion überführen lässt:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{j=1}^{n} g_j \qquad \rightarrow \qquad \text{Min!}$$

mit

$x_0$ : Gesamtkosten der Zuordnung;

$x_{ij}$ : Binärvariable mit

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, wenn die Einzelzuordnung } i \rightarrow j \text{ erfolgt} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n;$

$f_i$ : Zeilenreduktionskonstante für die Zeile i, $f_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n;$

$g_j$ : Spaltenreduktionskonstante für die Spalte j, $g_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n;$

$\tilde{c}_{ij}$ : modifizierte Kosten der Einzelzuordnung mit

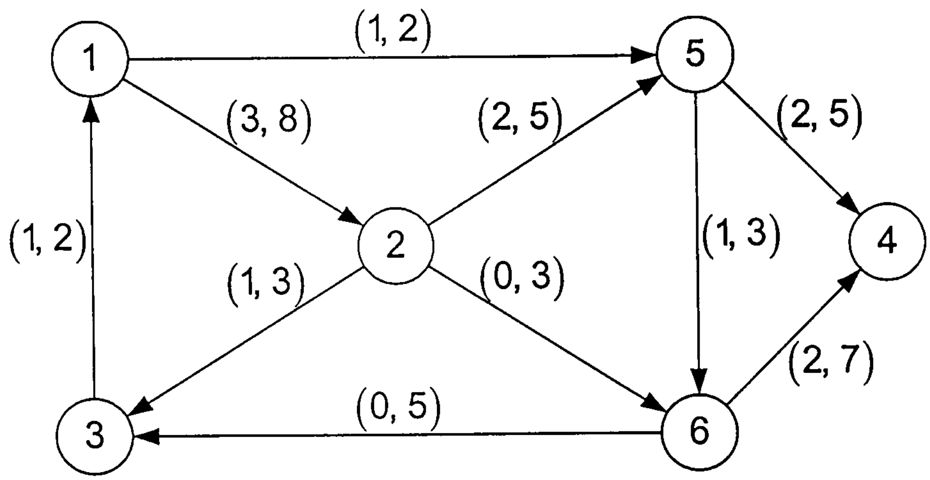
$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - f_i - g_j \qquad \text{für } i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n.$$

Welche Aussagen lassen sich bzgl. des optimalen Zielfunktionswertes treffen?

Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 4** (16 Punkte)

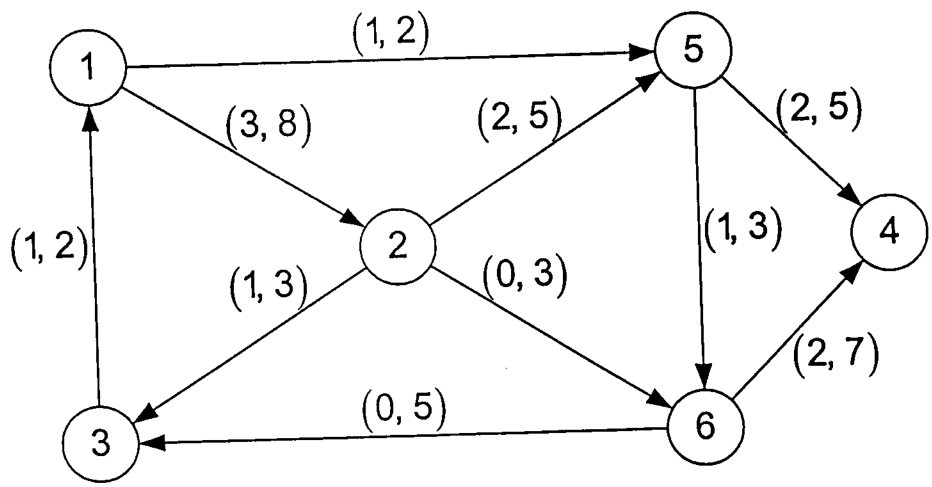
Gegeben sei der folgende Kapazitätendigraph:

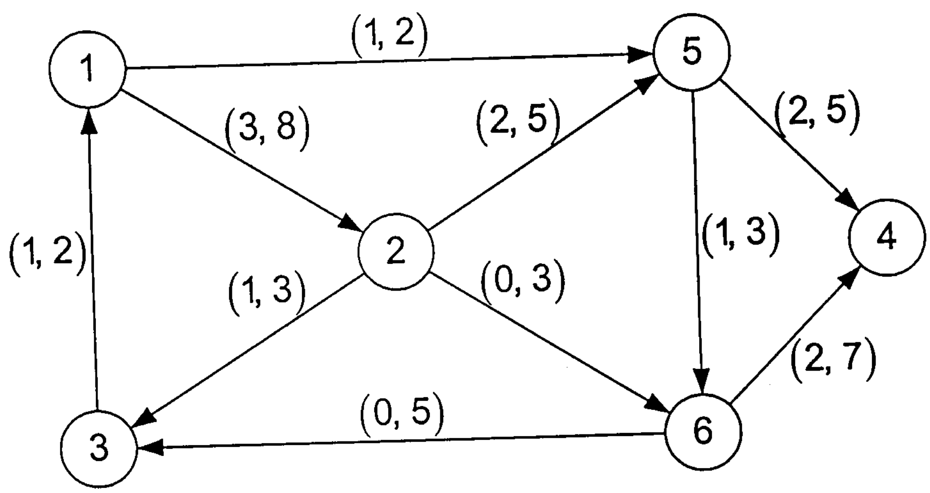


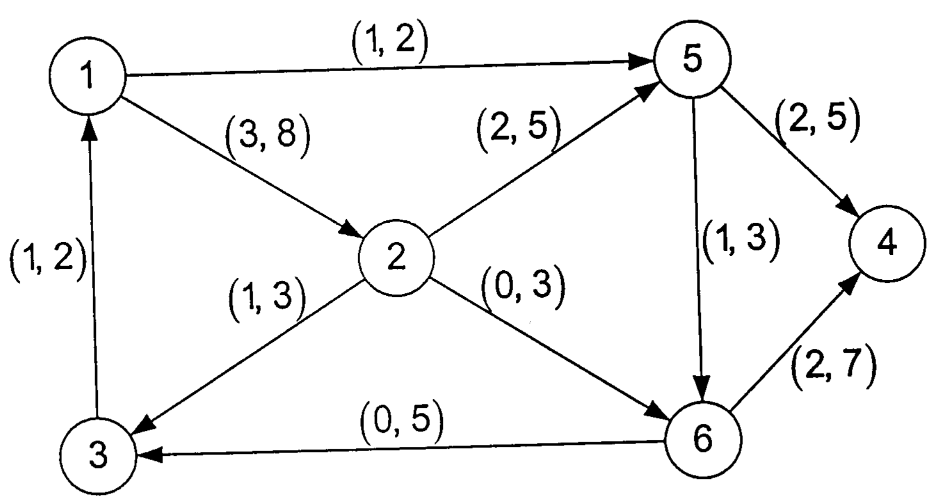

a) Erstellen Sie ein Optimierungssystem für den gegebenen Kapazitätendigraph zur Bestimmung eines maximalen Flusses von Knoten 1 nach Knoten 4! Definieren Sie alle verwendeten Symbole!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Ford und Fulkerson eine optimale Lösung des Problems und geben Sie auch den zugehörigen Zielwert an! Nutzen Sie für Ihre Lösung die Kapazitätendigraphen auf der nächsten Seite! Gehen Sie dabei von folgendem zulässigen Fluss aus:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


1
2
3
4
5
6
(1, 2)
(3, 8)
(2, 5)
(2, 5)
(1, 2)
(1, 3)
(1, 3)
(0, 3)
(2, 7)
(0, 5)


1
2
3
4
5
6
(1, 2)
(3, 8)
(2, 5)
(2, 5)
(1, 2)
(1, 3)
(1, 3)
(0, 3)
(2, 7)
(0, 5)


1
2
3
4
5
6
(1, 2)
(3, 8)
(2, 5)
(2, 5)
(1, 2)
(1, 3)
(1, 3)
(0, 3)
(2, 7)
(0, 5)